

# Applications - Chapitre 11

Dynamique terrestre, pendule de Foucault  
et système de points matériels

**EPFL**

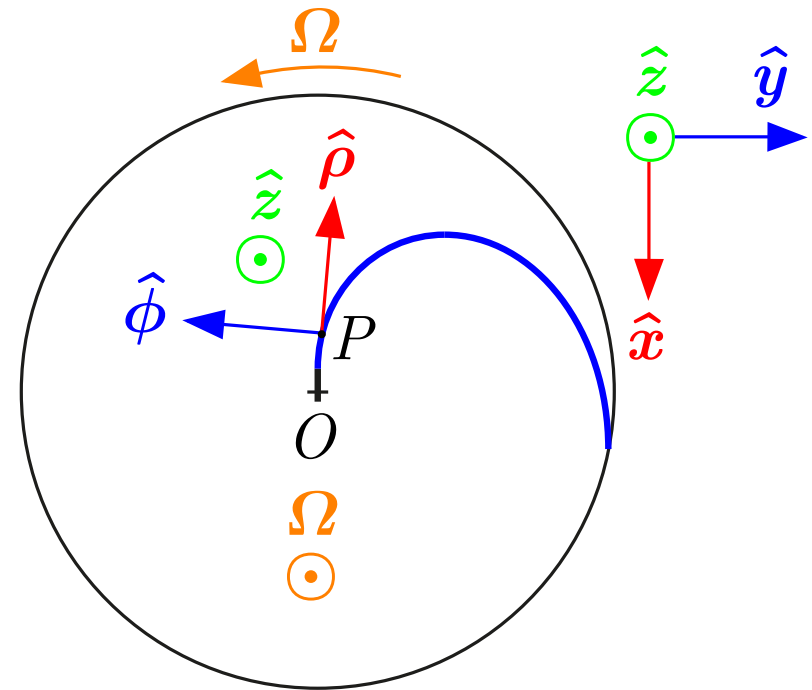
## A.11.1 Jet d'eau tournant

## A.11.2 Pendule double

## A.11.1 Jet d'eau tournant

## A.11.2 Pendule double

- Une buse est fixée au centre  $O$  d'un disque. Le disque est en rotation à vitesse angulaire  $\Omega = \Omega \hat{z} = \text{cste}$  dans le sens trigonométrique par rapport au sol.
- Un jet d'eau sort horizontalement et radialement de la buse. On modélise le mouvement d'une goutte d'eau considérée comme un point matériel  $P$  de masse  $m$ .
- La trajectoire du jet d'eau est la courbe bleue fixe dans le référentiel accéléré du disque.



1 Référentiel absolu : sol  
repère cartésien  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$

2 Référentiel relatif : disque  
repère cylindrique  $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z})$

- Grandeurs cinématiques relatives :

- 1 Position relative : (A.11.1)

$$\mathbf{r}_r(P) = \rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + z \hat{\mathbf{z}}$$

- 2 Vitesse relative : (A.11.2)

$$\mathbf{v}_r(P) = \dot{\rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho \dot{\phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \dot{z} \hat{\mathbf{z}}$$

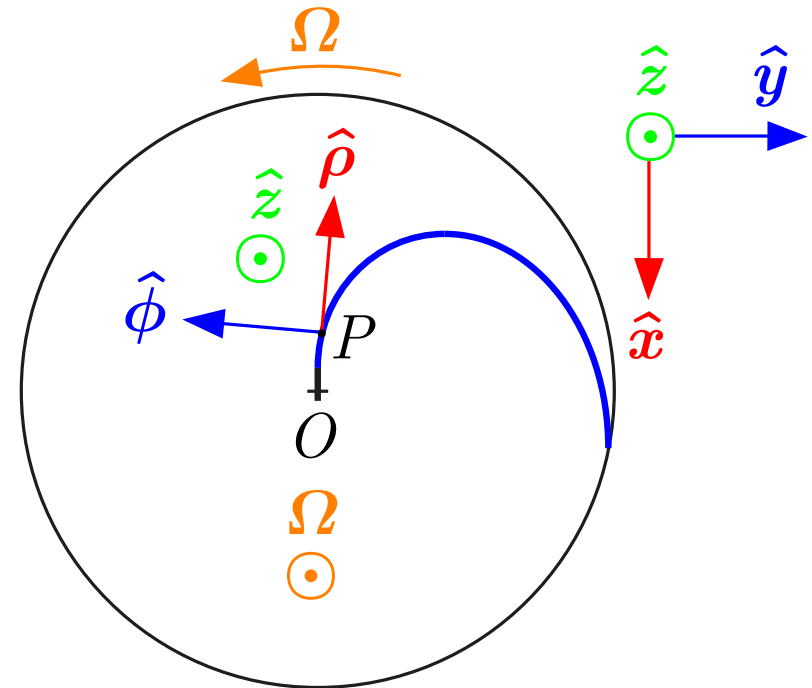
- 3 Accélération relative :

$$\mathbf{a}_r(P) = \left( \ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2 \right) \hat{\boldsymbol{\rho}} + \left( \rho \ddot{\phi} + 2 \dot{\rho} \dot{\phi} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} + \ddot{z} \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{A.11.3})$$

- Force extérieure :

- 1 Poids :

$$\mathbf{P} = m \mathbf{g} = -mg \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{A.11.4})$$



- Grandeurs cinématiques relatives :

$$\mathbf{r}_r(P) = \rho \hat{\rho} + z \hat{z}$$

$$\mathbf{v}_r(P) = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\phi} \hat{\phi} + \dot{z} \hat{z}$$

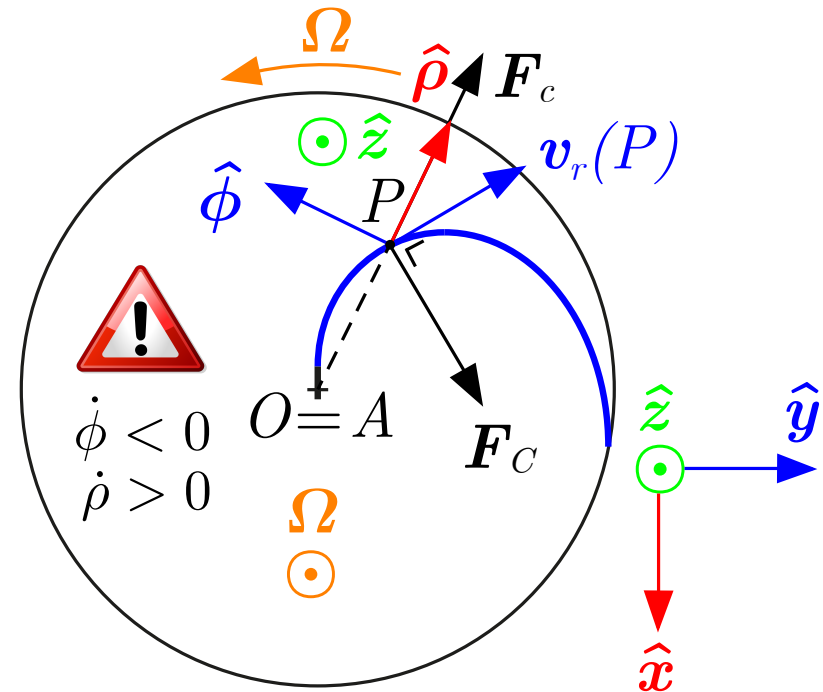
- Forces d'inertie :  $\dot{\Omega} = \mathbf{0}$  ;  $\mathbf{a}_a(A) = \mathbf{0}$

- 1 Force centrifuge :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_c &= -m \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_r(P)) = -m \Omega^2 \hat{z} \times (\hat{z} \times (\rho \hat{\rho} + z \hat{z})) \\ &= m \rho \Omega^2 \hat{\rho} \end{aligned} \quad (\text{A.11.5})$$

- 2 Force de Coriolis :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_C &= -2m \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r(P) = -2m \Omega \hat{z} \times (\dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\phi} \hat{\phi} + \dot{z} \hat{z}) \\ &= -2m \dot{\rho} \Omega \hat{\phi} + 2m \rho \dot{\phi} \Omega \hat{\rho} \end{aligned} \quad (\text{A.11.6})$$



- Loi du mouvement relatif :

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} + \sum \mathbf{F}^{\text{in}} = \mathbf{P} + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_C = m \mathbf{a}_r(P) \quad (\text{A.11.7})$$

- Equations du mouvement relatif :

$$\text{selon } \hat{\rho} : m \rho \Omega^2 + 2 m \rho \dot{\phi} \Omega = m (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \quad (\text{A.11.8})$$

$$\text{selon } \hat{\phi} : -2 m \dot{\rho} \Omega = m (\rho \ddot{\phi} + 2 \dot{\rho} \dot{\phi}) \quad (\text{A.11.9})$$

$$\text{selon } \hat{z} : -m g = m \ddot{z} \quad \Rightarrow \quad \ddot{z} = -g \quad (\text{A.11.10})$$

- Mouvement radial : (A.11.8)  $\Rightarrow$

$$\ddot{\rho} - (\Omega + \dot{\phi})^2 \rho = 0 \quad (\text{A.11.11})$$

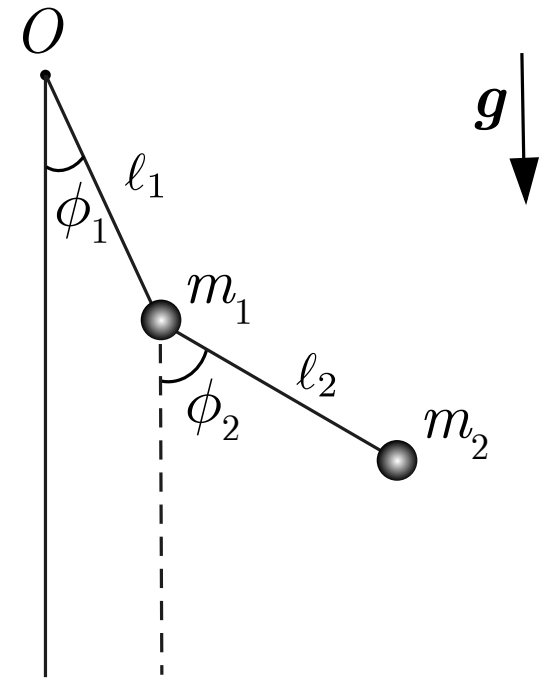
- Mouvement azimutal : (A.11.9)  $\Rightarrow$

$$\rho \ddot{\phi} + 2 \dot{\rho} (\Omega + \dot{\phi}) = 0 \quad (\text{A.11.12})$$

## A.11.1 Jet d'eau tournant

## A.11.2 Pendule double

- On considère un pendule double constitué de deux bras de masses négligeables attachés l'un à l'autre.
- Le premier bras de longueur  $l_1$  est attaché à l'origine au point  $O$ . Un point matériel de masse  $m_1$  est fixé à l'autre extrémité. L'angle d'oscillation dans le plan vertical est  $\phi_1$ .
- Le deuxième bras de longueur  $l_2$  est attaché au point matériel de masse  $m_1$ . Un point matériel de masse  $m_2$  est fixé à l'autre extrémité. L'angle d'oscillation dans le plan vertical est  $\phi_2$ .



- Vecteurs positions :

$$\mathbf{r}_1 = l_1 \hat{\boldsymbol{\rho}}_1$$

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = l_2 \hat{\boldsymbol{\rho}}_2$$

- Changement de base : rotation d'angle  $\phi_2 - \phi_1$

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}_2 = \cos(\phi_2 - \phi_1) \hat{\boldsymbol{\rho}}_1 + \sin(\phi_2 - \phi_1) \hat{\boldsymbol{\phi}}_1$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_2 = -\sin(\phi_2 - \phi_1) \hat{\boldsymbol{\rho}}_1 + \cos(\phi_2 - \phi_1) \hat{\boldsymbol{\phi}}_1$$

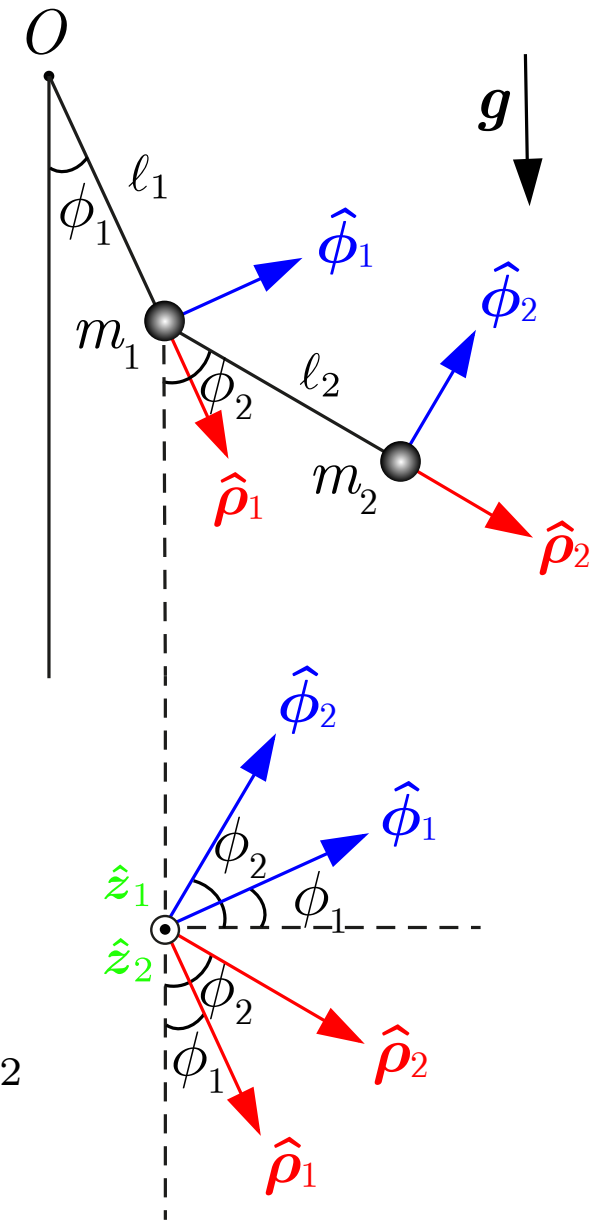
- Vecteurs vitesses : formules de Poisson

$$\mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{r}}_1 = l_1 \dot{\hat{\boldsymbol{\rho}}}_1 = l_1 \dot{\phi}_1 \hat{\mathbf{z}}_1 \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_1 = l_1 \dot{\phi}_1 \hat{\boldsymbol{\phi}}_1$$

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1 = l_2 \dot{\hat{\boldsymbol{\rho}}}_2 = l_2 \dot{\phi}_2 \hat{\mathbf{z}}_2 \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_2 = l_2 \dot{\phi}_2 \hat{\boldsymbol{\phi}}_2$$

$$= l_2 \dot{\phi}_2 \left( -\sin(\phi_2 - \phi_1) \hat{\boldsymbol{\rho}}_1 + \cos(\phi_2 - \phi_1) \hat{\boldsymbol{\phi}}_1 \right)$$

$$\mathbf{v}_2 = -l_2 \dot{\phi}_2 \sin(\phi_2 - \phi_1) \hat{\boldsymbol{\rho}}_1 + \left( l_1 \dot{\phi}_1 + l_2 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) \right) \hat{\boldsymbol{\phi}}_1$$



- Vecteurs vitesses :

$$\mathbf{v}_1 = l_1 \dot{\phi}_1 \hat{\phi}_1$$

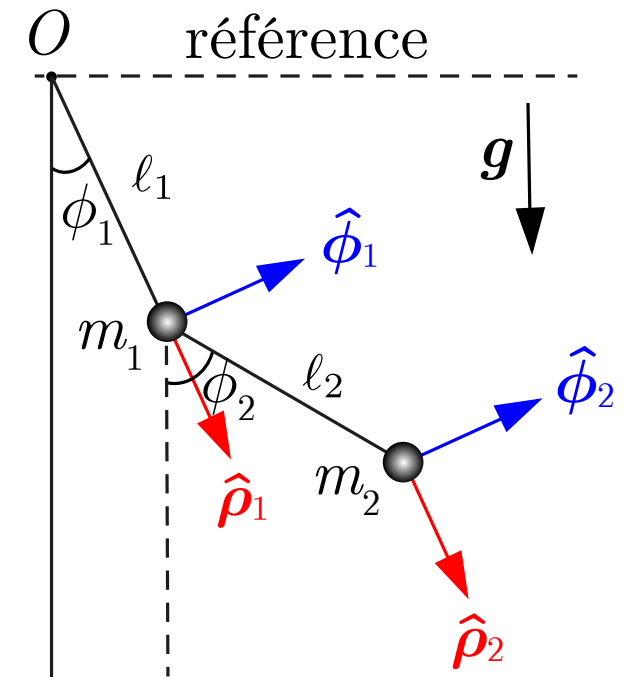
$$\mathbf{v}_2 = -l_2 \dot{\phi}_2 \sin(\phi_2 - \phi_1) \hat{\rho}_1 + \left( l_1 \dot{\phi}_1 + l_2 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) \right) \hat{\phi}_1$$

- Vitesses quadratiques :

$$v_1^2 = l_1^2 \dot{\phi}_1^2 \quad (\text{A.11.13})$$

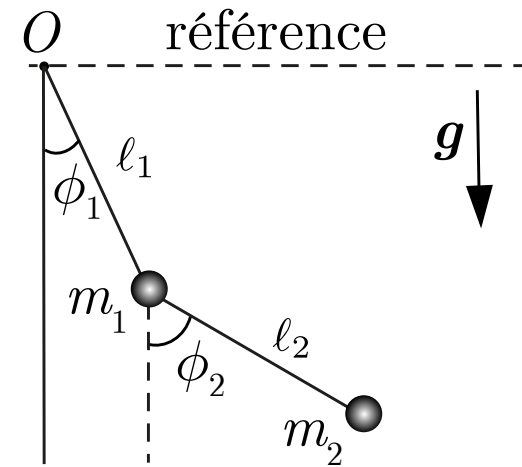
$$\begin{aligned} v_2^2 &= l_2^2 \dot{\phi}_2^2 \sin^2(\phi_2 - \phi_1) + l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + l_2^2 \dot{\phi}_2^2 \cos^2(\phi_2 - \phi_1) \\ &\quad + 2 l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) \\ &= l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + l_2^2 \dot{\phi}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) \end{aligned} \quad (\text{A.11.14})$$

- On choisit comme référence d'énergie potentielle gravitationnelle la droite horizontale qui passe par le point  $O$ .



- Energie cinétique :

$$\begin{aligned}
 T &= T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \\
 &= \frac{1}{2} m_1 \ell_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left( \ell_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \ell_2^2 \dot{\phi}_2^2 \right) \\
 &\quad + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)
 \end{aligned}
 \tag{A.11.15}$$



- Energie potentielle :

$$\begin{aligned}
 V &= V_{g1} + V_{g2} = -m_1 g h_1 - m_2 g h_2 \\
 &= -m_1 g \ell_1 \cos \phi_1 - m_2 g (\ell_1 \cos \phi_1 + \ell_2 \cos \phi_2)
 \end{aligned}
 \tag{A.11.16}$$

- Energie mécanique :  $E = T + V$

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \ell_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \ell_2^2 \dot{\phi}_2^2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) \\
 &\quad - (m_1 + m_2) g \ell_1 \cos \phi_1 - m_2 g \ell_2 \cos \phi_2
 \end{aligned}
 \tag{A.11.17}$$

- Conservation de l'énergie mécanique :  $\dot{E} = 0$

$$\begin{aligned}
 & (m_1 + m_2) \ell_1^2 \dot{\phi}_1 \ddot{\phi}_1 + m_2 \ell_2^2 \dot{\phi}_2 \ddot{\phi}_2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \left( \dot{\phi}_1 \ddot{\phi}_2 + \ddot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \right) \cos(\phi_2 - \phi_1) \\
 & + m_2 \ell_1 \ell_2 \left( \dot{\phi}_1^2 \dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2^2 \right) \sin(\phi_2 - \phi_1) + (m_1 + m_2) g \ell_1 \dot{\phi}_1 \sin \phi_1 \\
 & + m_2 g \ell_2 \dot{\phi}_2 \sin \phi_2 = 0
 \end{aligned} \tag{A.11.18}$$

- Factorisation : vitesses angulaires  $\dot{\phi}_1$  et  $\dot{\phi}_2$  : 2 degrés de liberté

$$\begin{aligned}
 & \left[ (m_1 + m_2) \ell_1^2 \ddot{\phi}_1 + m_2 \ell_1 \ell_2 \ddot{\phi}_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) \right. \\
 & \quad \left. - m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\phi}_2^2 \sin(\phi_2 - \phi_1) + (m_1 + m_2) g \ell_1 \sin \phi_1 \right] \dot{\phi}_1 \\
 & + \left[ m_2 \ell_2^2 \ddot{\phi}_2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \ddot{\phi}_1 \cos(\phi_2 - \phi_1) \right. \\
 & \quad \left. + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\phi}_1^2 \sin(\phi_2 - \phi_1) + m_2 g \ell_2 \sin \phi_2 \right] \dot{\phi}_2 = 0
 \end{aligned} \tag{A.11.19}$$

- Equations du mouvement : (A.11.19) satisfaite pour tout  $\dot{\phi}_1$  et  $\dot{\phi}_2$

$$(m_1 + m_2) \ell_1^2 \ddot{\phi}_1 + m_2 \ell_1 \ell_2 \ddot{\phi}_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) - m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\phi}_2^2 \sin(\phi_2 - \phi_1) + (m_1 + m_2) g \ell_1 \sin \phi_1 = 0 \quad (A.11.20)$$

$$m_2 \ell_2^2 \ddot{\phi}_2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \ddot{\phi}_1 \cos(\phi_2 - \phi_1) + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\phi}_1^2 \sin(\phi_2 - \phi_1) + m_2 g \ell_2 \sin \phi_2 = 0 \quad (A.11.21)$$

- Dans le cas général, les équations du mouvement couplées (A.11.20) et (A.11.21) donnent lieu à un mouvement chaotique caractérisé par une extrême sensibilité aux conditions initiales.
- Dans la limite des mouvements lents avec de petits angles, on fait une approximation au 2<sup>e</sup> ordre en  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\dot{\phi}_1$  et  $\dot{\phi}_2$  dans l'expression de l'énergie mécanique  $E$ . Ces équations décrivent alors deux oscillateurs harmoniques couplés.

- Limite des mouvements lents avec de petits angles :

2<sup>e</sup> ordre en  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\dot{\phi}_1$  et  $\dot{\phi}_2$  pour  $E$

$$\cos \phi_1 \simeq 1 - \frac{1}{2} \phi_1^2 \quad \text{et} \quad \cos \phi_2 \simeq 1 - \frac{1}{2} \phi_2^2$$

$$\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) \simeq \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \left( 1 - \frac{1}{2} (\phi_2 - \phi_1)^2 \right) \simeq \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2$$

- Energie mécanique : (A.11.17)  $\Rightarrow$  2<sup>e</sup> ordre en  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\dot{\phi}_1$  et  $\dot{\phi}_2$

$$\begin{aligned} E = & \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \ell_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) g \ell_1 \phi_1^2 \\ & + \frac{1}{2} m_2 \ell_2^2 \dot{\phi}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 g \ell_2 \phi_2^2 \end{aligned} \quad (\text{A.11.22})$$

$$+ m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 - (m_1 + m_2) g \ell_1 - m_2 g \ell_2$$

- Conservation de l'énergie mécanique :  $\dot{E} = 0$

$$\begin{aligned} & \left[ (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\phi}_1 + (m_1 + m_2) g l_1 \phi_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\phi}_2 \right] \dot{\phi}_1 \\ & + \left[ m_2 l_2^2 \ddot{\phi}_2 + m_2 g l_2 \phi_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\phi}_1 \right] \dot{\phi}_2 = 0 \end{aligned} \quad (A.11.23)$$

- Equations du mouvement : (A.11.23) satisfaite pour tout  $\dot{\phi}_1$  et  $\dot{\phi}_2$

$$(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\phi}_1 + (m_1 + m_2) g l_1 \phi_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\phi}_2 = 0 \quad (A.11.24)$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\phi}_2 + m_2 g l_2 \phi_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\phi}_1 = 0 \quad (A.11.25)$$

- Equations du mouvement :  $l = l_1 = l_2$  et  $m = m_1 = m_2$

$$2 m l^2 \ddot{\phi}_1 + 2 m g l \phi_1 + m l^2 \ddot{\phi}_2 = 0 \quad (A.11.26)$$

$$m l^2 \ddot{\phi}_2 + m g l \phi_2 + m l^2 \ddot{\phi}_1 = 0 \quad (A.11.27)$$

- Equations du mouvement : divisée par  $m \ell^2$

$$2 \ddot{\phi}_1 + 2 \frac{g}{\ell} \phi_1 + \ddot{\phi}_2 = 0 \quad (\text{A.11.28})$$

$$\ddot{\phi}_2 + \frac{g}{\ell} \phi_2 + \ddot{\phi}_1 = 0 \quad (\text{A.11.29})$$

- Système matriciel :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \end{pmatrix} + \frac{g}{\ell} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.11.30})$$

- Système matriciel : forme condensée

$$A \ddot{\Phi} + \frac{g}{\ell} B \Phi = 0 \quad (\text{A.11.31})$$

- Matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad \ddot{\Phi} = \begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.11.32})$$

- Solutions réelles : mouvements harmoniques oscillatoires de pulsation  $\omega$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \operatorname{Re} \left( e^{i(\omega t + \varphi)} \right) \begin{pmatrix} \phi_{1,0} \\ \phi_{2,0} \end{pmatrix} = \cos(\omega t + \varphi) \begin{pmatrix} \phi_{1,0} \\ \phi_{2,0} \end{pmatrix} \quad (\text{A.11.33})$$

- Dérivées temporelles secondes :

$$\ddot{\Phi} = \begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \end{pmatrix} = -\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \begin{pmatrix} \phi_{1,0} \\ \phi_{2,0} \end{pmatrix} = -\omega^2 \Phi \quad (\text{A.11.34})$$

- Système matriciel : forme condensée

$$C(\omega^2) \Phi \equiv \left( \frac{g}{\ell} B - \omega^2 A \right) \Phi = \mathbf{0} \quad (\text{A.11.35})$$

- Matrice :

$$C(\omega^2) = \begin{pmatrix} 2 \left( \frac{g}{\ell} - \omega^2 \right) & -\omega^2 \\ -\omega^2 & \frac{g}{\ell} - \omega^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.11.36})$$

- Déterminant : (A.11.37)

$$\det (C (\omega^2)) = \begin{vmatrix} 2 \left( \frac{g}{\ell} - \omega^2 \right) & -\omega^2 \\ -\omega^2 & \frac{g}{\ell} - \omega^2 \end{vmatrix} = 2 \left( \frac{g}{\ell} - \omega^2 \right)^2 - \omega^4 = 0$$

- Valeurs propres : équation bicarrée

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{g}{\ell} \left( 2 \pm \sqrt{2} \right) \quad (\text{A.11.38})$$

- Equations aux valeurs propres : forme condensée

$$C (\omega_{\pm}^2) \Phi_{\pm} = 0 \quad (\text{A.11.39})$$

- Equations aux valeurs propres : système matriciel

$$\begin{pmatrix} 2 \left( \frac{g}{\ell} - \omega_{\pm}^2 \right) & -\omega_{\pm}^2 \\ -\omega_{\pm}^2 & \frac{g}{\ell} - \omega_{\pm}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{\pm 1} \\ \phi_{\pm 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.11.40})$$

- Valeurs propres :

$$\omega_{\pm}^2 = \left(2 \pm \sqrt{2}\right) \frac{g}{\ell} \quad (\text{A.11.41})$$

- Equations aux valeurs propres : système matriciel

$$\frac{g}{\ell} \begin{pmatrix} 2(-1 \mp \sqrt{2}) & -2 \mp \sqrt{2} \\ -2 \mp \sqrt{2} & -1 \mp \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{\pm 1} \\ \phi_{\pm 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.11.42})$$

- Conditions :

$$\begin{aligned} - \left(2 \pm 2\sqrt{2}\right) \phi_{\pm 1} + \left(-2 \mp \sqrt{2}\right) \phi_{\pm 2} &= 0 \\ - \left(2 \pm \sqrt{2}\right) \phi_{\pm 1} + \left(-1 \mp \sqrt{2}\right) \phi_{\pm 2} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.11.43})$$

- Vecteurs propres : rapport des composantes

$$\frac{\phi_{\pm 1}}{\phi_{\pm 2}} = \frac{-2 \mp \sqrt{2}}{2 \pm 2\sqrt{2}} = \frac{-1 \mp \sqrt{2}}{2 \pm \sqrt{2}} = \mp \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{A.11.44})$$

- Vecteurs propres :

$$\Phi_+(t) = \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_-(t) = \cos(\omega_- t + \varphi_-) \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.11.45})$$

- Solution vectorielle : générale

$$\Phi(t) = c_+ \Phi_+(t) + c_- \Phi_-(t) \quad (\text{A.11.46})$$

$$\begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix} = c_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} + c_- \cos(\omega_- t + \varphi_-) \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Equations horaires : générales

$$\phi_1(t) = -\sqrt{2} c_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) + \sqrt{2} c_- \cos(\omega_- t + \varphi_-) \quad (\text{A.11.47})$$

$$\phi_2(t) = 2 c_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) + 2 c_- \cos(\omega_- t + \varphi_-)$$

Les coefficients  $c_+$  et  $c_-$  sont déterminés par les conditions initiales.

- Equations de la vitesse : générales

$$\dot{\phi}_1(t) = \sqrt{2} c_+ \omega_+ \sin(\omega_+ t + \varphi_+) - \sqrt{2} c_- \omega_- \sin(\omega_- t + \varphi_-) \quad (\text{A.11.48})$$

$$\dot{\phi}_2(t) = -2 c_+ \omega_+ \sin(\omega_+ t + \varphi_+) - 2 c_- \omega_- \sin(\omega_- t + \varphi_-)$$

- Conditions initiales : petites angles et vitesses angulaires nulles

$$\phi_1(0) = \phi_{1,0} \quad \text{et} \quad \phi_2(0) = \phi_{2,0} \quad (\text{A.11.49})$$

$$\dot{\phi}_1(0) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\phi}_2(0) = 0 \quad (\text{A.11.50})$$

- Angles de déphasage : nuls

$$\varphi_+ = \varphi_- = 0 \quad (\text{A.11.51})$$

- Angles initiaux :

$$\phi_{1,0} = -\sqrt{2} c_+ + \sqrt{2} c_- \quad (\text{A.11.52})$$

$$\phi_{2,0} = 2 c_+ + 2 c_-$$

- Coefficients :

$$\begin{aligned} c_+ &= \frac{1}{4} \left( -\sqrt{2} \phi_{1,0} + \phi_{2,0} \right) \\ c_- &= \frac{1}{4} \left( \sqrt{2} \phi_{1,0} + \phi_{2,0} \right) \end{aligned} \quad (A.11.54)$$

- Equations horaires :

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= -\sqrt{2} c_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) + \sqrt{2} c_- \cos(\omega_- t + \varphi_-) \\ \phi_2(t) &= 2 c_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) + 2 c_- \cos(\omega_- t + \varphi_-) \end{aligned} \quad (A.11.47)$$

- Equations horaires : (A.11.55)

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= \frac{1}{4} \left( 2 \phi_{1,0} - \sqrt{2} \phi_{2,0} \right) \cos(\omega_+ t) + \frac{1}{4} \left( 2 \phi_{1,0} + \sqrt{2} \phi_{2,0} \right) \cos(\omega_- t) \\ \phi_2(t) &= \frac{1}{2} \left( \phi_{2,0} - \sqrt{2} \phi_{1,0} \right) \cos(\omega_+ t) + \frac{1}{2} \left( \phi_{2,0} + \sqrt{2} \phi_{1,0} \right) \cos(\omega_- t) \end{aligned}$$